Mathématiques

Durée : 3 heures.- Coefficient : 3

Les trois problèmes sont indépendants et doivent être traités.
La calculatrice personnelle est interdite.

Problème 1

On considère la fonction $f:[0,\pi]^2 \to \mathbb{R}$ définie par :

$f(x,y)=\dfrac{x(\pi-y)}{2}$ si $0\le x\le y\le\pi$ et $f(x,y)=\dfrac{y(\pi-x)}{2}$ si $0\le y\le x\le\pi$

Partie A

① Préciser la valeur de f sur les bords du carré $[0,\pi]^2$

② Montrer que $\forall (x,y)\in[0,\pi]^2$, $f(y,x)=f(x,y)$

③ Calculer l'intégrale double $\iint_{[0,\pi]^2} f(x,y)\,dx\,dy$

④ À toute fonction continue $\psi:[0,\pi]\to\mathbb{R}$, on associe la fonction u définie par:

$$u(x)=\int_0^\pi f(x,y)\psi(y)dy=\frac{(\pi-x)}{2}\int_0^x y\psi(y)dy+\frac{x}{2}\int_x^\pi(\pi-y)\psi(y)dy.$$

a) Montrer que u est deux fois dérivable et calculer $u'(x)$ et $u''(x)$
b) Montrer que u est solution de l'équation différentielle

$$-\frac{2}{\pi}u''(x)=\psi(x) \text{ avec } u(0)=0 \text{ et } u(\pi)=0$$

c) Dans le cas où $\psi(x)=\sin(nx)$ avec n entier strictement positif, donner l'expression de u sous forme d'une intégrale et donner la solution de l'équation différentielle du ④ b)

Partie B

Pour $y\in]0,\pi[$ on définit une fonction φ_y sur $\mathbb{R}$, 2π-périodique et impaire telle que:
$\forall x\in[0,\pi], \varphi_y(x)=f(x,y)$

① Pour $y\in]0,\pi[$ donné, déterminer le développement en série de Fourier de φ_y .
[On peut soit faire le calcul direct, soit utiliser le résultat du ④ c)]

② Pour $(x,y)\in]0,\pi[^2$, en déduire une expression simple de $\displaystyle\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{\sin(nx)\sin(ny)}{n^2}$ et de

$\displaystyle\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{\sin^2(nx)}{n^2}$

③ a) À l'aide de la question précédente, calculer la somme $S'=\displaystyle\sum_{k=0}^{k=\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}$

b) On pose $S''=\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{1}{(2k)^2}$ et $S=\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{1}{n^2}=S'+S''$. Montrer que ces séries convergent et déduire du calcul précédent la valeur de S.

④ a) Calculer $\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{\sin^2(ny)}{n^4}$, et en déduire la somme $T'=\sum_{k=0}^{k=\infty}\frac{1}{(2k+1)^4}$

b) On pose $T''=\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{1}{(2k)^4}$ et $T=\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{1}{n^4}=T'+T''$. Montrer que ces séries convergent et déduire du calcul précédent la valeur de T.

Problème 2

On associe à tout polynôme P à coefficients réels le polynôme $L(P)$ défini par

$$L(P)(x)=-xP''(x)+(x-1)P'(x)$$

① Soit $E=\mathbb{R}_3[x]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 3 à coefficients réels. Montrer que L est un endomorphisme de E et déterminer sa matrice **M** dans la base canonique de E : $B_1=(T_0,T_1,T_2,T_3)$ avec $T_k:x\mapsto x^k$

② Déterminez la dimension du noyau et la dimension de l'image de L.

③ Diagonalisez la matrice **M**, (on notera λ_k ,pour $0\le k\le 3$, les valeurs propres de **M** rangées dans l'ordre croissant, et donc aussi valeurs propres de L). Déduisez-en la suite de polynômes $P_k(x)$ unitaires de degrés k(ayant 1 pour coefficient du terme de degré k) telle que $L(P_k)=\lambda_k P_k$ Montrez que $B_2=(P_0,P_1,P_2,P_3)$ est une base de E.

④ On s'intéresse maintenant à la recherche de solutions polynomiales P de l'équation

$$L(P)-\lambda P=Q \quad \text{avec } \lambda\in\mathbb{R} \text{ et } Q\in E \text{ fixés} \qquad (*)$$

a) On décompose $Q=\sum_{k=0}^{k=3}a_k P_k$, et on recherche P sous la forme $P=\sum_{k=0}^{k=3}b_k P_k$.

Établir les relations entre les coefficients $(a_k)_{0\le k\le 3}$ et $(b_k)_{0\le k\le 3}$

b) Montrer que si λ n'est pas valeur propre de M, il existe une solution unique pour tout Q, et donner le développement de cette solution dans la base B_2 en fonction de $(a_k)_{0\le k\le 3}$

c) Si λ est une valeur propre de L ($\lambda=\lambda_k$, avec $0\le k\le 3$), quelle condition doit vérifier Q pour qu'il existe une solution ? Déterminer alors toutes les solutions de (*) par leur développement dans la base B_2.

d) On prend $\lambda=\lambda_2$, $Q(x)=-28+118x-63x^2+7x^3$ Montrer qu'il existe une unique solution de l'équation $L(P)-\lambda_2 P=Q$ telle que $P(0)=0$ Déterminer cette solution sous la forme $P=\sum_{k=0}^{k=3}b_k P_k$ en calculant les $(b_k)_{0\le k\le 3}$

⑤ Montrez que P_3 possède 3 racines réelles distinctes dans l'intervalle $]0,+\infty[$, dont une dans l'intervalle $]0,1[$ et une dans l'intervalle $]3,+\infty[$

Problème 3

Soit un plan P muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$. On note Δ_0 la droite d'équation $y=0$, I le point de coordonnées $(0,1)$ et J le point de coordonnées $(0,-1)$.
Dans ce problème, si E est un ensemble de points du plan, on note $E^* = E \setminus (E \cap \Delta_0)$, c'est à dire E privé de son intersection avec Δ_0

Partie A

① Soit M de coordonnées (x,y) avec $y \neq 0$ et $y \neq 1$. La droite (IM) coupe Δ_0 en Ω de coordonnées $(x_\Omega, 0)$. Calculer x_Ω en fonction de (x,y)

② Soit $r = \dfrac{\overline{\Omega I}}{\overline{\Omega M}}$ Montrer que les coordonnées du point M' tel que: $\overrightarrow{\Omega M'} = r\overrightarrow{\Omega J}$ vérifient

$$\begin{cases} x' = \dfrac{-x}{y} \\ y' = \dfrac{-1}{y} \end{cases} \qquad (1)$$

③ Pour $M(x,y)$ avec $y \neq 0$ la relation (1) définit une application f de $P^* = P \setminus \Delta_0$ vers P^*, même si $y=1$. Montrer que cette application est bijective et donner l'expression de sa bijection réciproque.
④ Soit D une droite distincte de Δ_0 ayant pour équation cartésienne $ax+by=c$ avec $(a\,,\,b) \neq (0\,,\,0)$. L'image de D^* par f, notée D'^*, est une droite D' privée éventuellement d'un point. Donner une équation cartésienne de D' à l'aide de $(a\,,\,b\,,c)$.
⑤ Soient deux droites D_1 et D_2 toutes deux non parallèles à Δ_0 et strictement parallèles entre elles. Les images de D_1^* et D_2^* sont incluses dans les droites D_1' et D_2'. Quelle particularité présente l'intersection de D_1' et D_2' ?
⑥ De même soient deux droites D_1 et D_2 (toutes deux distinctes de Δ_0) sécantes et dont l'intersection appartient à Δ_0. Les images de D_1^* et D_2^* sont incluses dans les droites D_1' et D_2'. Quelle particularité géométrique présentent D_1' et D_2' ?

Partie B

Dans cette partie, f est toujours l'application de P^* vers P^* définie par (1). On note C le cercle de centre I et de rayon R avec R strictement positif, C^* ce cercle privé de ses points d'intersection éventuels avec Δ_0

① Donner une équation cartésienne de C ainsi que celle de l'image de C^* par f.
② Montrer qu'il existe une unique valeur de R (à déterminer) telle que l'image de C^* par f est une parabole dont on donnera une équation, le foyer et la directrice.
③ Déterminer l'ensemble des réels R strictement positifs tels que l'image de C^* par f est une ellipse dont on donnera une équation réduite, le centre, les foyers, et l'excentricité en fonction de R.
④ Déterminer l'ensemble des réels R strictement positifs tels que l'image de C^* par f est une hyperbole dont on donnera une équation réduite, le centre, les foyers, l'excentricité et les asymptotes en fonction de R.
⑤ Pour $R>1$ soient U et V les intersections de C avec Δ_0. T_U et T_V sont les tangentes à C en U et V. Les images par f de T_U^* et T_V^* sont incluses dans les droites T_U' et T_V'. Montrer que T_U' et T_V' sont les asymptotes de l'image de C^* par f.